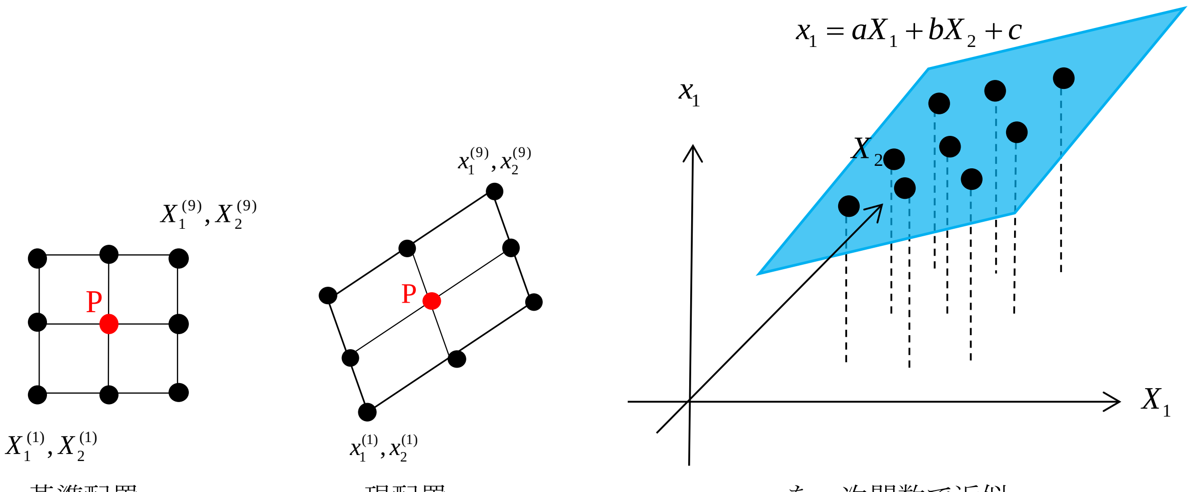
DICのひずみ計算

デジタル画像相関法を用いると，基準配置（試験前）において位置$\mathbf{X}$を占めていた物質点の現配置（現時刻）における座標$\mathbf{x}$を求めることができる．その後，物質点$\mathbf{X}$とその周囲の物質点$\mathbf{X}+\mathrm{d}\mathbf{X}$ の現配置の座標$\mathbf{x}$，$\mathbf{x}+\mathrm{d}\mathbf{x}$ を用いて，物質点$\mathbf{X}$の変形勾配テンソル$\mathbf{F}=F_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j=(\partial x_i/\partial X_j)\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j$を求める．

図中の物質点Pの変形勾配を求めるために，点P近傍の9個の物質点を利用する．各点の基準配置の座標を$X_i^{(j)}$（$j=1\sim9$），現配置の座標を$x_i^{(j)}$とする．現配置の座標$x_i^{(j)}$は元の基準配置の座標$X_i^{(j)}$と時間に依存する．形式的には$\mathbf{x}=f(\mathbf{X},t)$と書ける．今，点 P の近傍のみを考えているため，高次項は無視して，$\mathbf{x}$は$\mathbf{X}$に線形に依存すると仮定できる．一次関数を用いると，$x_1=aX_1+bX_2+c$，$x_2=dX_1+eX_2+f$ と表せる．下図にはこの様子を示している．変形勾配は，$F_{11}=\partial x_1/\partial X_1=a$，$F_{12}=\partial x_1/\partial X_2=b$，$F_{21}=\partial x_2/\partial X_1=d$，$F_{22}=\partial x_2/\partial X_2=e$と求めることができる．

DIC は，画像相関法を用いて基準配置の物質点に対する現配置の座標値を同定し，複数の座標値を一次関数で近似して各係数を求めている．このようにして変形勾配を同定している．



基準配置　　現配置　　x_1を一次関数で近似

<u>問題1　以下の空欄を埋めよ．</u>

上述のような手順によって変形勾配$\mathbf{F}=F_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j=(\partial x_i/\partial X_j)\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j$が求められる．

$$[F]=\begin{bmatrix}F_{11} & F_{12}\\ F_{21} & F_{22}\end{bmatrix} \tag{1}$$

右Cauchy–Green変形テンソルは$\mathbf{C}=\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}$なので，次のように計算できる．

$$[C]=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{12} & C_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\end{bmatrix} \tag{2}$$

右Cauchy–Green変形テンソル$\mathbf{C}$の主値λ_i（$i=1,2$，$\lambda_1\geq\lambda_2$）はC_{ij}を用いると，以下の様に与えられる．

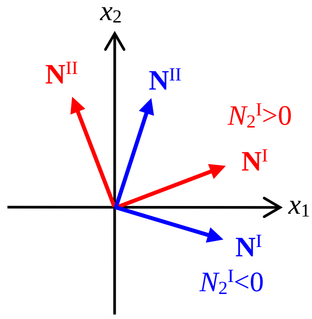
$$\lambda_1 = \qquad (3)$$

$$\lambda_2 = \qquad (4)$$

次に，主値λ_iに対する固有ベクトル$\mathbf{N}^i (= N_j^i \mathbf{e}_j)$（単位ベクトル）を求める．固有ベクトルは，

$$\begin{bmatrix} C_{11}-\lambda_i & C_{12} \\ C_{12} & C_{22}-\lambda_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1^i \\ N_2^i \end{Bmatrix} = 0$$

を満たす．単位ベクトルの条件$(N_1^i)^2 + (N_2^i)^2 = 1$を考慮すると，固有ベクトルは次式で書きあらわせる．



$$N_1^i = \pm \qquad , \qquad N_2^i = \mp$$

ここで，$i = \mathrm{I}$の固有ベクトルについて，$N_1^{\mathrm{I}} \geq 0$と仮定して，$\mathbf{N}^{\mathrm{I}}$を得る．

$$N_1^{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{C_{12}^2}{C_{12}^2 + (C_{11}-\lambda_1)^2}}, \qquad N_2^{\mathrm{I}} = -\frac{(C_{11}-\lambda_1)}{C_{12}} \sqrt{\frac{C_{12}^2}{C_{12}^2 + (C_{11}-\lambda_1)^2}}$$

右図に示すようにN_2^{I}の符号に依存して$\mathbf{N}^{\mathrm{II}}$は次式で与えられる．

$$N_1^{\mathrm{II}} = \qquad , \qquad N_2^{\mathrm{II}} = \qquad \text{for} \quad N_2^{\mathrm{I}} \leq 0$$

$$N_1^{\mathrm{II}} = \qquad , \qquad N_2^{\mathrm{II}} = \qquad \text{for} \quad N_2^{\mathrm{I}} \geq 0$$

右ストレッチテンソルは$\mathbf{U} = U_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \sqrt{\mathbf{C}}$である．$\Lambda_i = \sqrt{\lambda_i}$とおくと，$\mathbf{U} = \Lambda_i \mathbf{N}^i \otimes \mathbf{N}^i$と書ける．$\mathbf{N}^i = N_1^i \mathbf{e}_1 + N_2^i \mathbf{e}_2$（$i = \mathrm{I}, \mathrm{II}$）を考慮すると右ストレッチテン$(N_2^{\mathrm{I}})^2 \ln \Lambda_1 + (N_2^{\mathrm{II}})^2 \ln \Lambda_2$ソルの成分$U_{ij}$が得られる．

$$[U] = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{12} & U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \qquad \end{bmatrix} \qquad (5)$$

対数ひずみは$\mathbf{E}^L = E_{ij}^L \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \ln \mathbf{U}$で与えられる．ここで，対数は主値に対して計算することに注意すると，次のように計算できる．（P_{ij}は固定座標から主軸座標への変換行列）

$$\mathbf{E}^L = [P]^{\mathrm{T}} [\ln \Lambda][P], \qquad P_{ij} = \mathbf{N}^i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} \qquad \end{bmatrix} \qquad (6)$$

$$\left[E^L\right] = \begin{bmatrix} E_{11}^L & E_{12}^L \\ E_{12}^L & E_{22}^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \qquad \end{bmatrix} \qquad (7)$$

問題２

上述の計算を Excel（対数ひずみの計算(単純せん断).xlsx）で実施し，単純せん断の変形を解析せよ．