

ここで、 J_1, J_2, J_3 は次に示すような量 (応力成分の関数) である。

基本不変量

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \sigma_{ii} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} && \text{tr } \sigma \\ J_2 &= \frac{\sigma_{ij}\sigma_{ji}}{2} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 && \text{tr } \sigma^2 / 2 \\ J_3 &= \frac{\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki}}{3} && \text{tr } \sigma^3 / 3 \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

主応力の大きさ $\sigma^{(p)}$ は応力を記述する座標系が $(x-y-z)$ か $(x'-y'-z')$ にかかわらず応力状態が決まれば一義的に決まるものである。応力成分の関数 J_1, J_2, J_3 は記述する座標系によらず一定の値をとるはずである。たとえば、 $J_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_{x'x'} + \sigma_{y'y'} + \sigma_{z'z'}$ となる。したがって、このような応力成分の関数 J_1, J_2, J_3 は **応力の不変量** (stress invariant) とよばれる。不変量 J_1, J_2, J_3 の関数である J_1, J_2, J_3 もまた不変量であるが、これらは **応力の第1, 第2, 第3不変量** (first, second and third stress invariant) とよばれる。主応力 $\sigma^{(p)}$ は3次方程式(2.22)の三つの解 $\sigma^{(p)} = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ として与えられる。この三つの主応力の作用方向(主応力方向)は互いに直交している(章末演習問題2を参照)。

2.2 ひずみ

A. ひずみと変位の関係

図 2.5 に示すように、物体内の点 A を考える。点 A の位置はその座標成分 $A(x, y)$ で表される。ここで、この物体の変形と剛体移動*1)により点 $A(x, y)$ が点 $A'(x + u_x, y + u_y)$ の位置へ移動したとする。このような物体中のある点の移動量を**変位** (displacement) とよび、変位ベクトル $\mathbf{u} = \{u\} = \{u_x \ u_y\}$ で表される。この変位ベクトルはその点の位置 (x, y) によって異なるので、成分 u_x, u_y は (x, y) の関数

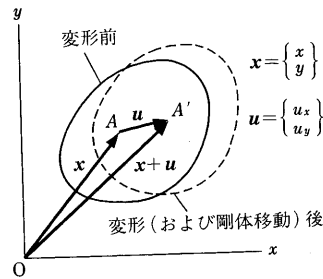
$$u_x = u_x(x, y), \quad u_y = u_y(x, y) \quad (2.25)$$


図 2.5

*1) 剛体移動 (rigid-body motion) とは文字どおり変形せず位置だけが変わることをいう。

であるといえる。

図 2.6 に示すように、点 $A(x, y)$ に隣接する点 $B(x + \Delta x, y)$, $C(x, y + \Delta y)$ を考える。ここで、 AB, AC は x および y 方向互いに直交する長さ $\Delta x, \Delta y$ の2本の微小線素である。この物体の変形と剛体移動により点 $A(x, y)$ が点 $A'(x + u_x, y + u_y)$ の位置へ移動したとすると、点 B, C はそれぞれ次のような座標点 B', C' の位置へ移動する。

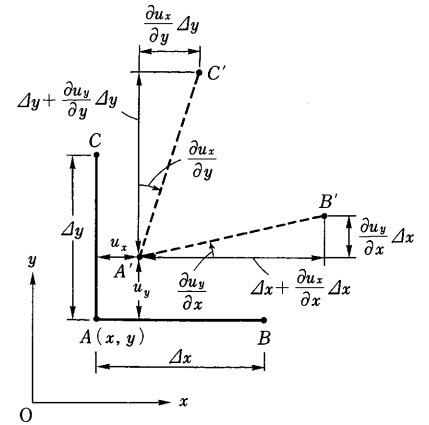


図 2.6

$$\text{点 } B' \left(x + \Delta x + u_x + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \Delta x, y + u_y + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \Delta x \right)$$

$$\text{点 } C' \left(x + u_x + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \Delta y, y + \Delta y + u_y + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \Delta y \right)$$

線素 AB, AC の回転角 $\Delta\phi_x = (\partial u_y / \partial x)$ および $\Delta\phi_y = (\partial u_x / \partial y)$ が微小なので*1), x 方向の線素 AB の長さの変化 (伸び・縮み) Δu_x , および y 方向の線素 AC の長さの変化 (伸び・縮み) Δu_y はそれぞれ次のようになる。

$$\text{線素 } AB \text{ の伸び} \cdot \text{縮み} = \Delta u_x = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \Delta x \quad (2.26)$$

$$\text{線素 } AC \text{ の伸び} \cdot \text{縮み} = \Delta u_y = \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \Delta y$$

1.2 節で説明したように、 x あるいは y 方向線素の単位長さ当りの伸び (あるいは縮み) として定義される垂直ひずみ $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}$ は結局次式で表される。

$$\epsilon_{xx} = \frac{\Delta u_x}{\Delta x} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\Delta u_y}{\Delta y} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (2.27)$$

工学せん断ひずみ (engineering shear strain) γ_{xy} は、初め互いに直交していた微小線素 AB, AC の変形による角度変化 $(\Delta\phi_x + \Delta\phi_y)$ として定義さ

*1) 図 2.6 は変形を誇張して描いてあるが、実際の金属材料の弾性ひずみの大きさは 0.001 のオーダーをこえることはない。

れる。ここで、 $\Delta\phi_x = \partial u_y / \partial x$, $\Delta\phi_y = \partial u_x / \partial y$ なので、工学せん断ひずみ γ_{xy} は次式で表される。

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (2.28)$$

工学せん断ひずみの 1/2 で定義されたせん断ひずみ

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} \quad (2.29)$$

はせん断ひずみテンソル (shear strain tensor) とよばれるが、この意味については次項で述べる。

時計まわりの物体要素の剛体回転は回転 (rotation) とよばれ次式で表される (図 2.7 参照)。

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (2.30)$$

なお、3次元の場合も含めて、ひずみ成分および回転成分は変位ベクトル $\mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\}$ の勾配 ($\partial u_i / \partial x_j$)*1) を用いて次式のように書き表すことができる。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.31)$$

これらの成分を具体的に書くと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \omega_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad \omega_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), \\ \omega_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad \omega_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), \\ \omega_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

[参考] さらに一般的なひずみの定義： 上で述べたひずみの定義は視覚的にわかりやすいが、数学的には次のようにひずみを定義することもできる。物体点 $A(x_1, x_2, x_3)$ が変形(あるいは剛体移動)により点 $A'(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ に移動したとする。

*1) $(\partial u_i / \partial x_j)$ を変位勾配 (displacement gradient) とよぶ。

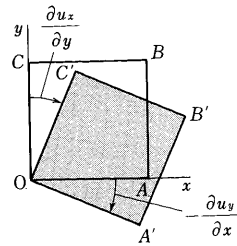


図 2.7

このとき変位 $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ を用いると

$$\bar{x}_k = x_k + u_k, \quad d\bar{x}_k = dx_k + \frac{\partial u_k}{\partial x_p} dx_p \quad (2.34)$$

と書ける。したがって、変形(あるいは剛体移動)前後の微小線素の長さをそれぞれ ds , $d\bar{s}$ と書くと

$$d\bar{s}^2 = d\bar{x}_k d\bar{x}_k, \quad ds^2 = dx_k dx_k \quad (2.35)$$

となるので、式(2.34)より次式が導ける。

$$d\bar{s}^2 - ds^2 = 2E_{ij} dx_i dx_j, \quad E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (2.36)$$

この E_{ij} は大変形 (large deformation) の場合も含むひずみの定義でグリーンひずみテンソル (Green strain tensor) とよばれる。式(2.36)は $E_{ij} = 0$ のときには微小線素 ds の長さが変化しないことを表している。また、証明は省略するが、 $E_{ij} = 0$ ($i \neq j$) のときには互いに直交する微小線素の角度変化がない。したがって E_{ij} は変形の尺度としての意味をもつことがわかる。なお、微小変形 (small deformation) の場合には変位勾配の 2次項は 1次項に比べて無視できるので、これは式(2.31)のひずみの定義と同じになる。

B. ひずみの座標変換

物体内のある点のひずみ状態 (すなわち変形の程度) は次のひずみ成分からなるマトリックスで表される。

$$\mathbf{E} = [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

この x - y 座標系で表現されたひずみ $\mathbf{E} = [E] = [\varepsilon_{ij}]$ を新たな x' - y' 座標系で成分を書き直してみよう。これは、応力の座標変換と同様に、座標変換マトリックス $[R] = [R_{ij}]$ を用いて次式のように座標変換 (テンソルの座標変換) すればよい。

$$[\varepsilon_{i'j'}] = [E'] = [R][E][R]^T \quad \text{または} \quad \varepsilon_{i'j'} = R_{im} R_{jn} \varepsilon_{mn} \quad (2.38)$$

このようにして得られたひずみ $[\varepsilon_{i'j'}]$ の意味は明確である。たとえば、 $\varepsilon_{x'x'}$ は新たに設定した x' 軸方向の微小線素の伸び (あるいは縮み) の程度を表している。式(2.38)の証明は簡単である (章末の演習問題 4 を参照)。

ここで注意が必要なのは、せん断ひずみ成分として工学せん断ひずみ γ_{ij} で