2　練習問題

2.0 ひずみと回転

（１）「2 章練習問題の参考資料」を参考にして，微小ひずみおよび回転の定義をまとめよ．

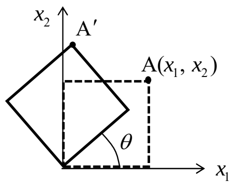
（２）下図のように，微小要素が x_3 軸回りに θ の回転を受ける場合を想定する．

(a) 変形前の点 A の座標を (x_1, x_2) とする．A’の座標を求めて，変位 u_1, u_2 を x_1, x_2 の関数として表せ．

(b) 微小ひずみおよび回転を導出せよ．

(c) $\theta = 1, 45, 90°$ について，微小ひずみおよび回転テンソルを求めよ．

(d) 伸縮していないにもかかわらずひずみがゼロでない理由を，（１）の導出過程をもとに検討せよ．



2.1 変形勾配

微小要素の 2 次元変形を考察する．下図の破線は微小要素の変形前の基準配置を示している．微小要素内の物質点の位置は，基準配置では $\mathbf{X}$，現配置では $\mathbf{x}$ とする．(a)~(f)の状況について解答せよ．

(a) 現配置の位置が下記のように与えられる．現配置の微小要素の形状を図示せよ．また，変形勾配を求めよ．

$x_1 = X_1 + 3$，　$x_2 = X_2 + 2$，　$x_3 = X_3$

(b) 現配置の位置が下記のように与えられる．

$x_1 = X_1 \cos\theta - X_2 \sin\theta$，　$x_2 = X_1 \sin\theta + X_2 \cos\theta$，　$x_3 = X_3$

$\theta = 30°$ とする．現配置の微小要素の形状を示せ．また，変形勾配を求めよ．

(c) 現配置の位置が下記のように与えられる．

$x_1 = 2X_1$，　$x_2 = 1.5X_2$，　$x_3 = X_3$

現配置の微小要素の形状を図示せよ．また，変形勾配を求めよ

(d) 現配置の位置が下記のように与えられる．

$x_1 = X_1$，　$x_2 = 0.5X_1 + X_2$，　$x_3 = X_3$

現配置の微小要素の形状を図示せよ．また，変形勾配を求めよ

(e) 現配置の位置が下記のように与えられる．

$x_1 = X_1 + 0.5X_2$，　$x_2 = 0.5X_1 + X_2$，　$x_3 = X_3$

現配置の微小要素の形状を図示せよ．また，変形勾配を求めよ

(f) $t = 1\mathrm{s}$ の位置は以下のように与えられる．

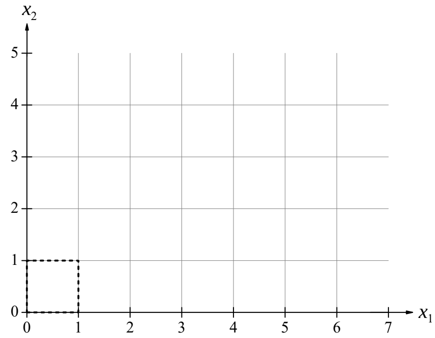
$x_1(1) = 2X_1$，　$x_2(1) = X_2$，　$x_3(1) = X_3$

$t = 2\mathrm{s}$ の位置は以下のように与えられる．

$x_1(2) = \cos(\pi/2)x_1(1) - \sin(\pi/2)x_2(1)$，　$x_2(2) = \sin(\pi/2)x_1(1) + \cos(\pi/2)x_2(1)$，

$x_3(2) = x_3(1) = X_3$

時刻 $t = 1, 2\mathrm{s}$ における微小要素の形状を図示せよ．また，変形勾配を求めよ



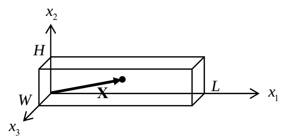
2.2 平行移動

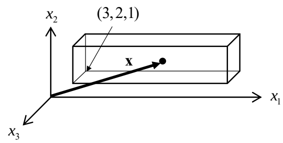
長さ，高さ，幅がそれぞれ L ，H ，W の角柱が下図のように平行移動した．以下の問いに答えよ．

(a) 物体内の任意の点について，変形後の位置 x_1, x_2, x_3 を変形前の位置 X_1, X_2, X_3 の関数として与えよ．

(b) 変位ベクトル $\mathbf{u}$ を求めよ．

(c) 変形後の位置を変形前の座標 X_i に関して偏微分して変形勾配を求めよ．





2.3 剛体回転

角柱が下図のように x_3 軸回りに角度 θ だけ剛体回転した．角柱と同じ剛体回転を受ける座標系を $\bar{x}_i$ と表している．以下の問いに答えよ．

(1) 座標系 $\bar{x}_i$ の基底ベクトルを $\bar{\mathbf{e}}_i$ とする． $\bar{\mathbf{e}}_i$ を基底 $\mathbf{e}_i$ を用いて表せ．

(2) 剛体回転テンソルは $\mathbf{R}=\bar{\mathbf{e}}_i\otimes\mathbf{e}_i$ である．(1)の答えを利用して，角度 θ を用いて剛体回転テンソルを求めよ（つまり， $\mathbf{R}=R_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j$ の形で表す）．

(3) 変形前の位置ベクトル $\mathbf{X}$ は剛体回転 $\mathbf{R}$ によって位置ベクトル $\mathbf{x}$ となる．この変形を式で表せ．

(4) 変形勾配テンソルを求めよ．

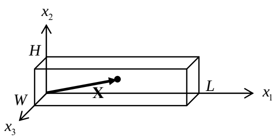
(5) 右 Cauchy–Green 変形テンソルを求めよ．

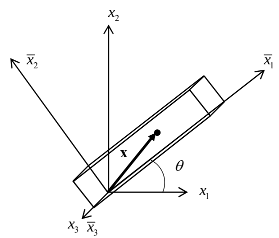
(6) Green–Lagrange ひずみを求め，ゼロであることを確認せよ．

(7) 変形勾配を極分解せよ．

(8) 変位 u_i を X_i の関数として求めよ．

(9) 微小変形論のおけるひずみテンソル $\varepsilon_{ij}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial X_j}+\dfrac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)$ を求め，非零であることを確認せよ．





2.4 単軸引張

均質な材料で作られた長さ，高さ，幅がそれぞれ L， H， W の角柱を x_1 方向に単軸引張を行った．各辺は座標軸と平行を保ったまま長さが l， h， w に変化した．各方向のストレッチを $\lambda_1=l/L$， $\lambda_2=h/H$， $\lambda_3=w/W$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 図のように材料内部の一点の変形前と後の位置を $\mathbf{X}$， $\mathbf{x}$ とする． x_i を X_i， λ_i の関数として求めよ．

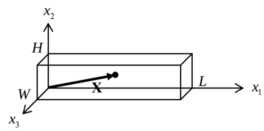
(2) $\partial x_i/\partial X_j$ を計算することで変形勾配を求めよ．

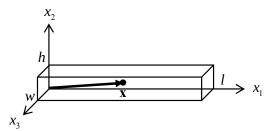
(3) 右 Cauchy–Green 変形テンソルを求めよ．

(4) Green–Lagrange ひずみを求めよ．

(5) 変形勾配を右極分解せよ．

(6) 基準配置を参照した対数ひずみを求めよ．





2.5 単純せん断

下図のように各辺が1の要素が一様な単純せん断変形を受ける状況を考える．破線が変形前の初期配置，実線が変形後の現配置を表している．なお，変形は2次元であり，$X_3 = x_3$ とする．要素内の任意の物質点について，以下の問いに答えよ．

(1) 変形後の位置 x_i を初期配置の位置 X_i の関数として表せ．

(2) 変形勾配を求めよ．

(3) 右 Cauchy–Green 変形テンソルを求めよ．

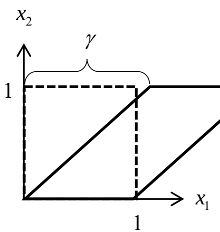
(4) Green–Lagrange ひずみを求めよ．

(5) 以下では $\gamma = 2/\sqrt{3}$ とする．右 Cauchy–Green 変形テンソルの主値および主軸を求めよ．

(6) 変形勾配を右極分解せよ．

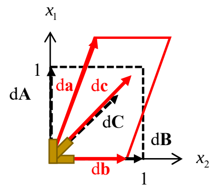
(7) 基準配置を参照した対数ひずみを求めよ．

(8) 基準配置において各辺に平行な線素のストレッチを求めよ．すなわち，微小ベクトル $\mathbf{dX} = \mathbf{e}_1$，$\mathbf{dX} = \mathbf{e}_2$ のストレッチを求めよ．



2.6 引張変形とせん断変形の負荷

引張りとねじりを受ける薄肉円管の微小要素は，下図に示すように引張とせん断変形を受ける．破線は基準配置における微小要素微を，実線は現配置における微小要素を示す．x_1，x_2 はそれぞれ円管の軸方向と円周方向である．$\mathbf{dA}$，$\mathbf{dB}$，$\mathbf{dC}$ はそれぞれ x_1，x_2，x_1 から45°の方向を向く単位長さの微小ベクトルであり，変形後の現配置では，$\mathbf{da}$，$\mathbf{db}$，$\mathbf{dc}$ となる．実験では，x_1，x_2，x_1 から45°の方向にひずみゲージを貼り付けておく．なお，薄肉円管の試験のため変形勾配 $F_{12} = 0$ とする．



(1) $x_1 - x_2$ 面内の2次元変形を考察する．非零の変形勾配は F_{11}, F_{21}, F_{22} の3成分である．$\mathbf{da}$，$\mathbf{db}$，$\mathbf{dc}$ の成分を $\mathbf{dA}$，$\mathbf{dB}$，$\mathbf{dC}$ および変形勾配の成分によって表せ．

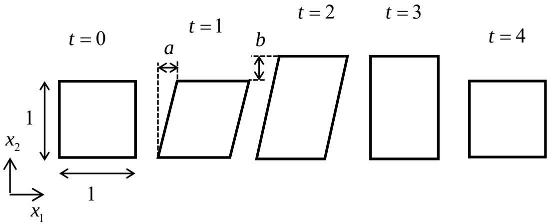
(2) 基準配置と現配置における微小ベクトルの長さをもとにして，x_1，x_2，45°方向の公称ひずみ e_1，e_2，e_{45} を求めよ．

(3) x_1，x_2，45°方向のストレッチは公称ひずみをもとに次のように定義する．$\Lambda_1 = e_1 + 1$，$\Lambda_2 = e_2 + 1$，$\Lambda_{45} = e_{45} + 1$．ストレッチを変形勾配によって書き表せ．

(4) 上記(3)において，ストレッチはひずみゲージによって測定された公称ひずみに1を足した値であり，実験で測定される値（既知の値）である．一方，変形勾配 F_{11}, F_{21}, F_{22} は未知である．未知数3個に対して方程式が3個得られているので，(3)の結果を連立して変形勾配を求めよ．

2.7 変形速度

下図は時刻 $t=0$ において単位正方形である微小要素の変形過程を示している．図示した時刻間の変形は時間に線形であるとする．以下の問いに答えよ．



(1)　時刻 $0 \le t \le 1$ において微小要素内の物質点の位置は以下のようになる．

$x_1(\mathbf{X},t) = X_1 + atX_2$,　　$x_2(\mathbf{X},t) = X_2$　　for　$0 \le t \le 1$

変形勾配について，$\mathbf{F}$ ，$\dot{\mathbf{F}}$ ，$\mathbf{F}^{-1}$ を求めよ．ただし，2 次元変形のため変形勾配の F_{i3}, F_{3i} 成分は考慮しなくてよい．

(2)　$\mathbf{L}, \mathbf{D}$ を求めよ．（$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$ の関係を利用）

(3)　Green–Lagrange ひずみ $\mathbf{E}$ を求めよ．

(4)　時刻 $1 \le t \le 2$ において物質点の位置は次のようになる．

$x_1(\mathbf{X},t) = X_1 + aX_2$,　　$x_2(\mathbf{X},t) = (1+bt')X_2$　　for　$1 \le t \le 2$ ，　$t' = t-1$

$\mathbf{D}$ および $\mathbf{E}$ を求めよ．

(5)　時刻 $2 \le t \le 3$ において物質点の位置は次のようになる．

$x_1(\mathbf{X},t) = X_1 + a(1-t')X_2$,　　$x_2(\mathbf{X},t) = (1+b)X_2$　　for　$2 \le t \le 3$ ，　$t' = t-2$

$\mathbf{D}$ および $\mathbf{E}$ を求めよ．

(6)　時刻 $3 \le t \le 4$ において物質点の位置は次のようになる．

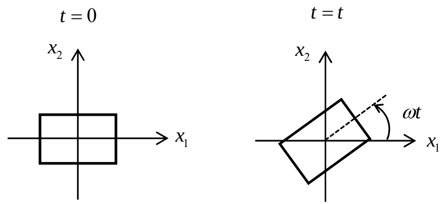
$x_1(\mathbf{X},t) = X_1$,　　$x_2(\mathbf{X},t) = (1+b-bt')X_2$　　for　$3 \le t \le 4$ ，　$t' = t-3$

$\mathbf{D}$ および $\mathbf{E}$ を求めよ．

(7)　$t=0$ および $t=4$ において微小要素は同一形状である．したがって，$t=4$ の $\mathbf{E}$ は零となる．一方，$0 \le t \le 4$ の変形速度を積分した値を求めて，$\int_0^4 \mathbf{D} \mathrm{d}t = \dfrac{ab}{2(1+b)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ となり，非零であることを確認せよ．したがって，変形速度を積分した値はひずみ測度として不適切である．

2.8 連続体スピン

2 次元面内で一定の角速度 ω で剛体回転する微小要素について考察する．変形勾配は $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ である．その成分は，$[F] = [R] = \begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}$ と書き表せる．以下の問いに答えよ．



(1)　時刻 $t=t$ における $\dot{\mathbf{F}}$ ，$\mathbf{F}^{-1}$ ，$\mathbf{L}$ ，$\mathbf{D}$ ，$\mathbf{W}$ を求めよ．