# 1　練習問題

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ をベクトル， $\mathbf{S}, \mathbf{T}, \mathbf{U}$ を 2 階のテンソル， $\mathbf{C}$ を 4 階のテンソルとする．以下の問いに答えよ．

## 1.1.　練習問題

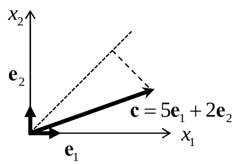
１．ベクトル $\mathbf{c}, \mathbf{d}$ を基底 $\mathbf{e}_i$ とその成分で表して，$\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = c_i d_i = c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3$ となることを示せ．

２．問１と同様に $\mathbf{d} \cdot \mathbf{c}$ を計算し， $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{c}$ となることを示せ．

３．ベクトル $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$， $\mathbf{b} = 4\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3$ のとき， $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ を求めよ．

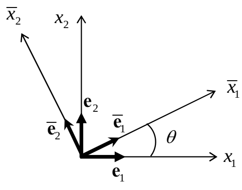
４．問３のベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の大きさおよび両者のなす角度を求めよ．

５．ベクトル $\mathbf{c} = 5\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ について， $\mathbf{e}_1$， $\mathbf{e}_2$ 方向の成分は，$\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_1 = 5$，$\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_2 = 2$ として求められる．右図のように $\mathbf{e}_1$ − $\mathbf{e}_2$ 面内で 45 度の方向（破線）に関する $\mathbf{c}$ の成分を求めよ．



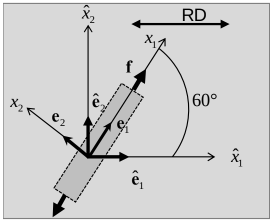

（まず，45 度方向の単位ベクトルを求める．）

６．右図のように座標系（基底）を $x_i$ から $\overline{x}_i$ へ変更する（$\mathbf{e}_3 = \overline{\mathbf{e}}_3$ を保つ 2 次元の変換）．この時，成分の座標変換行列 $P$（3×3）を求めよ．




７．問６において $\theta = 45°$ とする．問５の $\mathbf{c}$ は $\overline{x}_i$ 座標を参照すると $\mathbf{c} = \overline{c}_i \overline{\mathbf{e}}_i$ と表せる． $\overline{c}_i$ を求めよ．なお， $\overline{c}_1$ は問５の答えと一致する．

８．右図のように板材の圧延・圧延直角方向をそれぞれ $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ とする．圧延方向から 60° 傾いた $\mathbf{e}_1$ 方向から試験片を切り出して単軸引張試験を行なった．試験中の引張力 $f$ をベクトルで表すと $\mathbf{f} = f\mathbf{e}_1$ となる．$\mathbf{f}$ を $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ を用いて表せ．
（問７とは変換の向きが逆になっているので注意）




## 1.2.　練習問題

１. 2 つのベクトルが，$\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$，$\mathbf{b} = 4\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3$ のとき, ダイアド $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ を求めよ.

２．$\mathbf{T} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$ の成分を行列表示せよ.

３．問１の $\mathbf{a}$，問２の $\mathbf{T}$ より，$\mathbf{c} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}$ を求めよ．ただし，成分と基底を用いた表記方法と行列表示の 2 通りの方法で計算せよ.

４．問１の $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ および $\mathbf{d} = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ を用いて，$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{d}$ および $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{a}$ を求めて，$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{d} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{a}$ であることを示せ．ただし，成分と基底を用いた表記方法と行列表示の 2 通りの方法で計算せよ.

５．問１，２より，$\mathbf{T} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ および $\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{b}$ を求めて，$\mathbf{T} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{b}$ であることを示せ．ただし，成分と基底を用いた表記方法と行列表示の 2 通りの方法で計算せよ.

６．問２より，$\mathbf{T}^{\mathrm{T}}$（基底の入れ替え）と成分の添え字を入れ替えた $T_{ji}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ が等しいことを示せ.

７．問１，２より，$\mathbf{T}\cdot\mathbf{a}$ と $\mathbf{a}\cdot\mathbf{T}^{\mathrm{T}}$ を求めて，$\mathbf{T}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{T}^{\mathrm{T}}$ であることを示せ．ただし，成分と基底を用いた表記方法と行列表示の 2 通りの方法で計算せよ．

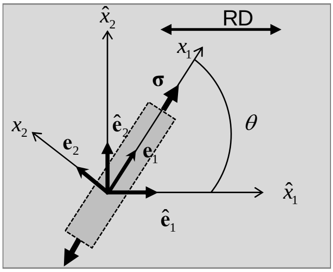
８．問２の $\mathbf{T}$ の対称成分と反対称成分を求めよ．

９．$\mathbf{S}=\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_3+3\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_3$ とし，以下の計算を実施せよ．$\mathbf{T}\cdot\mathbf{S}$，$\mathbf{S}\cdot\mathbf{T}$，$(\mathbf{T}\cdot\mathbf{S})^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}^{\mathrm{T}}$．なお，$(\mathbf{T}\cdot\mathbf{S})^{\mathrm{T}}=\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}^{\mathrm{T}}$ となることを確認せよ. ただし, 成分と基底を用いた表記方法と行列表示の 2 通りの方法で計算せよ.

１０． $\mathbf{T}:\mathbf{S}$ を求めよ．

１１．テンソルを 2 つの座標系を参照すると，$\mathbf{T}=T_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j=\overline{T}_{ij}\overline{\mathbf{e}}_i\otimes\overline{\mathbf{e}}_j$ と表せる．座標変換行列 $P_{ij}=\overline{\mathbf{e}}_i\cdot\mathbf{e}_j$ を求めて，$\overline{T}_{ij}$ を $T_{ij}$ および $P_{ij}$ によって表せ．添字表記および行列表記の 2 通りで示すこと．

１２．圧延方向から $\theta$ 回転した方向（$\mathbf{e}_1$）に単軸応力 $\sigma$ を負荷する．応力テンソルは $\boldsymbol{\sigma}=\sigma\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1$ と表せる. 圧延・圧延直角方向を参照した座標系における応力 $\boldsymbol{\sigma}=\hat{\sigma}_{ij}\hat{\mathbf{e}}_i\otimes\hat{\mathbf{e}}_j$ の各成分を求めよ．




１３．問１２と同様に，ひずみテンソルは $\boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon_{11}\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1+\varepsilon_{22}\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2+\varepsilon_{33}\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_3$ と表せる．圧延・圧延直角方向を参照した座標系におけるひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}=\hat{\varepsilon}_{ij}\hat{\mathbf{e}}_i\otimes\hat{\mathbf{e}}_j$ の各成分を求めよ．

１４．引張およびせん断を受け，$\varepsilon_{11}=0.3$，$\varepsilon_{22}=0.1$，$\varepsilon_{12}=0.2$ の状態にある．主ひずみおよび主方向を求めよ．

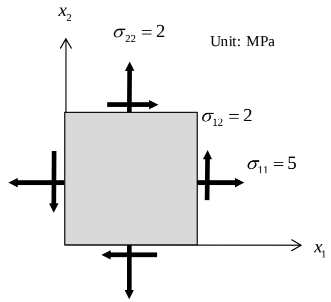
１５．微小要素が図のような平面応力状態にある．以下の問いに答えよ．

(a) 第 1，第 2，第 3 主不変量を求めよ．

(b) 主応力および主方向を求めよ．

(c) $\mathbf{e}_3$ 回りに $\theta = 30^\circ$ 回転した座標系 $\bar{x}_i$ $(\bar{\mathbf{e}}_i)$ に関する応力成分 $\bar{\sigma}_{ij}$ を求めよ．

(d) $\bar{\sigma}_{ij}$ を用いて，第 1，第 2，第 3 不変量，および主応力，主方向を求め，これらが座標系の選択に依存しないことを示せ．



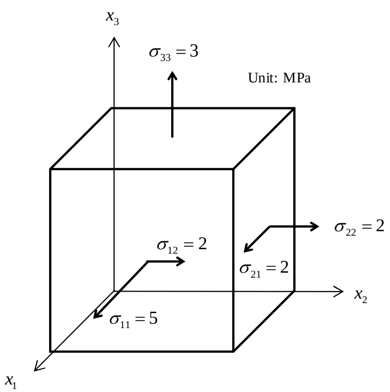

１６．微小立方体要素が左下図のような応力を受けている（負の面にも同様の応力が作用しているが図示していない）．

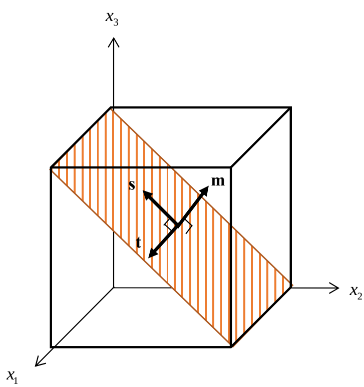
(a) 右下図の斜面について，図のように互いに直交する単位ベクトル **s, m, t** を設定する．**s** は面内にあり，**m** は面に垂直で，**t** は $x_1$ 方向を向く．**s, m, t** を基底 $\mathbf{e}_i$ を用いて表せ．

(b) (a) の結果をもとに，$\mathbf{s} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{t} = 0$ を確認せよ．

(c) 斜面に垂直方向に作用する応力を求めよ．

(d) 斜面を **s** 方向にせん断するせん断応力を求めよ．

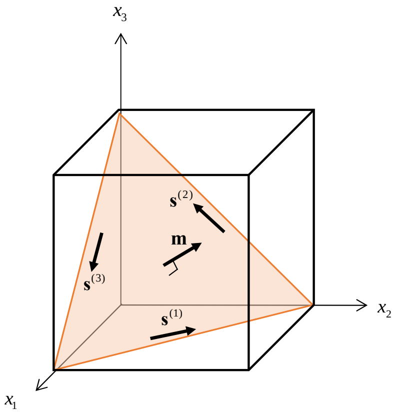


１７．微小立方体要素が $\boldsymbol{\sigma} = 100\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 50\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$ [MPa]の応力を受けている．

（a）下図の斜面について，$\mathbf{m}$ は単位法線ベクトルであり，$\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \mathbf{s}^{(3)}$ はそれぞれ斜面内にある図の向きの単位ベクトルである．向く．$\mathbf{m}$ および $\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \mathbf{s}^{(3)}$ を基底 $\mathbf{e}_i$ を用いて表せ．

（b）斜面を $\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \mathbf{s}^{(3)}$ 方向にせん断するせん断応力をそれぞれ求めよ．




１８．Von Mises の降伏関数を偏差応力 $\mathbf{s}$ を用いて表すと，$\bar{\sigma} = \sqrt{\dfrac{3}{2}\mathbf{s} : \mathbf{s}}$ と与えられる．関連流動則を用いる際，$\dfrac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{s}}$ の計算が必要となる．$\dfrac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{s}}$ を計算し，各成分を具体的に示せ．（１７の単位ベクトル $\mathbf{s}$ と混同しないように注意.）